УДК 519.2:621.391

КОЛИЧЕСТВО ИНФОРМАЦИИ ПО ШЕННОНУ В СОВМЕСТНОЙ ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИИ, ИНТЕРПОЛЯЦИИ И ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ПО НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ С ПАМЯТЬЮ

Н.С. Демин, С.В. Рожкова*

Томский государственный университет
*Томский политехнический университет
E-mail: svrhm@rambler.ru

Рассматривается информационный аспект совместной задачи фильтрации, интерполяции и экстраполяции стохастических процессов по непрерывно-дискретным наблюдениям с фиксированной памятью. Исследуется структура количества информации.

1. Введение

В [1] был введен и исследован комплекс задач обобщенной скользящей экстраполяции (как наиболее общий вид экстраполяции) стохастических процессов с непрерывным временем по совокупности реализаций процессов с непрерывным и дискретным временем, которые зависят не только от текущих, но и от произвольного числа прошлых значений ненаблюдаемого процесса. В связи с тем, что всякое оценивание связано с извлечением информации из наблюдений, то любая статистическая задача имеет информационный аспект [2]. В [3, 4] рассмотрен информационный аспект задачи фильтрации в случае наблюдений без памяти и с памятью единичной кратности, в [5] – совместной задачи фильтрации и обобщенной экстраполяции в случае произвольной памяти, в [6] – исследована структура в совместной задаче фильтрации и экстраполяции с произвольной памятью, а в [7, 8] – в совместной задаче фильтрации и интерполяции. В данной работе рассматриваются вопросы нахождения шенноновских мер количества информации в совместной задаче фильтрации, интерполяции и экстраполяции по непрерывно-дискретным наблюдениям с произвольной памятью. Используемые обозначения: $M\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $\mathbf{P}\{\cdot\}$ – вероятность события; $N\{y;a;B\}$ – гауссовская плотность.

2. Постановка задачи

Ненаблюдаемый n-мерный процесс x_t и наблюдаемый l-мерный процесс z_t определяются стохастическими дифференциальными уравнениями

$$dx_t = f(t, x_t)dt + \Phi_1(t)dw_t, \quad t \ge 0, \tag{1}$$

$$dz_t = h(t, x_t, x_{\tau_1}, \cdots, x_{\tau_N}, z)dt + \Phi_2(t, z)dv_t, \tag{2}$$

а наблюдаемый q-мерный процесс $\eta(t_m)$ с дискретным временем имеет вид

$$\eta(t_m) = g(t_m, x_{t_m}, x_{\tau_1}, \cdots, x_{\tau_N}, z) + \Phi_3(t_m, z)\xi(t_m), \quad m = 0,1,\cdots, \tag{3}$$

где $0<\tau_N<\tau_1<t_m\le t$, т. е. память фиксированная [1]. Предполагается: 1) w_t и v_t являются стандартными винеровскими процессами размеров r_1 и r_2, $\xi(t_m)$ – стандартная белая гауссовская последовательность размера r_3; 2) x_0, w_t, v_t, $\xi(t_m)$ – статистически независимы; 3) $f(\cdot)$, $h(\cdot)$, $g(\cdot)$, $\Phi_1(\cdot)$, $\Phi_2(\cdot)$, $\Phi_3(\cdot)$ непрерывны по всем аргументам; 4) $Q(\cdot)=\Phi_1(\cdot)\Phi_1^T(\cdot)>0$, $R(\cdot)=\Phi_2(\cdot)\Phi_2^T(\cdot)>0$, $V(\cdot)=\Phi_3(\cdot)\Phi_3^T(\cdot)>0$; 5) задана начальная плотность $p_0(x)=\partial\mathbf{P}\{x_0\le x\}/\partial x$.

В целях более компактной записи математических выражений введем оператор

$$\mathbf{L}_{\sigma,y}[\varphi_1(\sigma,y);\varphi_2(\sigma,y)] = \frac{\varphi_1(\sigma,y)}{\varphi_2(\sigma,y)} L_{\sigma,y}[\varphi_2(\sigma,y)] - \varphi_2(\sigma,y) L^*_{\sigma,y}\left[\frac{\varphi_1(\sigma,y)}{\varphi_2(\sigma,y)}\right], \tag{4}$$

где $L_{\sigma,y}[\varphi(\sigma,y)]$ и $L^{*}_{\sigma,y}[\varphi(\sigma,y)]$ – прямой и обратный операторы Колмогорова, соответствующие процессу (1), и расширенные переменные

$$\tilde{x}_{\tau}^{N}=\begin{bmatrix} x_{\tau_1} \\ \vdots \\ x_{\tau_N} \end{bmatrix},\quad \tilde{x}_{s}^{L}=\begin{bmatrix} x_{s_1} \\ \vdots \\ x_{s_L} \end{bmatrix},\quad \tilde{x}_{N}=\begin{bmatrix} x_{1} \\ \vdots \\ x_{N} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{x}^{L}=\begin{bmatrix} x^{1} \\ \vdots \\ x^{L} \end{bmatrix},\quad \tilde{x}_{N+L+1}=\begin{bmatrix} x \\ \tilde{x}_{N} \\ \tilde{x}^{L} \end{bmatrix}.$$

Ставится задача: найти информационное количество

$$I^{t}_{\tau,t,s}[\tilde{x}_{\tau}^{N},x_t,\tilde{x}_{s}^{L};z_0^t,\eta_0^m]=M\left\{\ln\frac{p^{t}_{\tau,t,s}(\tilde{x}_{\tau}^{N};x_t;\tilde{x}_{s}^{L})}{p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_{\tau}^{N};t,x_t;\tilde{s}_L,\tilde{x}_{s}^{L})}\right\} \quad (5)$$

о текущих x_t, прошлых $\tilde{x}_{\tau}^{N}=\{x_{\tau_1},x_{\tau_2},\ldots,x_{\tau_N}\}$ и будущих $\tilde{x}_{s}^{L}=\{x_{s_1},x_{s_2},\ldots,x_{s_L}\}$ значениях ненаблюдаемого процесса, которые содержатся в совокупности реализаций $z_0^t=\{z(\sigma);0\le\sigma\le t\}$ и $\eta_0^m=\{\eta(t_0),\eta(t_1),\ldots,\eta(t_m)\}$ наблюдаемых процессов (2), (3), где

$$p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N;t,x;\tilde{s}_L,\tilde{x}^{L})=$$
$$=\partial^{N+L+1}\mathbf{P}\{x_t\le x;\tilde{x}_{\tau}^{N}\le\tilde{x}_N;\tilde{x}_{s}^{L}\le\tilde{x}^{L}\}/\partial x\partial\tilde{x}_N\partial\tilde{x}^{L}, \quad (6)$$
$$p^{t}_{\tau,t,s}(\tilde{x}_N;x;\tilde{x}^{L})=$$
$$=\partial^{N+L+1}\mathbf{P}\{x_t\le x;\tilde{x}_{\tau}^{N}\le\tilde{x}_N;\tilde{x}_{s}^{L}\le\tilde{x}^{L}\mid z_0^t,\eta_0^m\}/\partial x\partial\tilde{x}_N\partial\tilde{x}^{L}. \quad (7)$$

3. Общий случай

Утверждение 1. Плотность (7) на интервалах $t_m\le t<t_{m+1}$ определяется уравнением

$$d_t p^{t}_{\tau,t,s}(\tilde{x}_N;x;\tilde{x}^{L})=$$
$$=\mathbf{L}_{t,x}[p^{t}_{\tau,t,s}(\tilde{x}_N;x;\tilde{x}^{L});p_t(x;\tilde{x}_N)]dt+$$
$$+p^{t}_{\tau,t,s}(\tilde{x}_N;x;\tilde{x}^{L})[h(t,x,\tilde{x}_N,z)-$$
$$-\overline{h(t,z)}]^{T}R^{-1}(t,z)[dz_t-\overline{h(t,z)}] \quad (8)$$

с начальным условием

$$p^{t_m}_{\tau,t_m,s}(\tilde{x}_N;x;\tilde{x}^{L})=$$
$$=[c(x,\tilde{x}_N;\eta(t_m),z)/c(\eta(t_m,z))]p^{t_m-0}_{\tau t_m s}(\tilde{x}_N;x;\tilde{x}^{L}), \quad (9)$$

$$p_t(x;\tilde{x}_N)=\partial^{N+1}\mathbf{P}\{x_t\le x;\tilde{x}_{\tau}^{N}\le\tilde{x}_N\mid z_0^t,\eta_0^m\}/\partial x\partial\tilde{x}_N,$$
$$\overline{h(t,z)}=M\{h(t,x_t,\tilde{x}_{\tau}^{N},z)\big|z_0^{t_m},\eta_0^m\}, \quad (10)$$

$$c(x,\tilde{x}_N,\eta(t_m),z)=$$
$$=\exp\left\{\begin{matrix}-\frac{1}{2}[\eta(t_m)-g(t_m,x,\tilde{x}_N,z)]^{T}\times\\ \times V^{-1}(t_m,z)[\eta(t_m)-g(t_m,x,\tilde{x}_N,z)]\end{matrix}\right\},$$
$$c(\eta(t_m),z)=M\{c(x_{t_m},\tilde{x}_{\tau}^{N},\eta(t_m),z)\big|z_0^{t_m},\eta_0^{m-1}\},$$

а $p^{t_m-0}_{\tau,t_m,s}(\tilde{x}_N;x;\tilde{x}^{L})=\lim p^{t}_{\tau,t,s}(\tilde{x}_N;x;\tilde{x}^{L})$ при $t\uparrow t_m$.

Данное утверждение следует из Теоремы 1 и Следствия 1 в [1].

Теорема. 1. Количество информации (5) на интервалах $t_m\le t<t_{m+1}$ определяется уравнением

$$\frac{dI^{t}_{\tau,t,s}[\tilde{x}_{\tau}^{N},x_t,\tilde{x}_{s}^{L};z_0^t,\eta_0^m]}{dt}=$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{tr}[M[R^{-1}(t,z)[h(t,x_t,\tilde{x}_{\tau}^{N},z)-$$
$$-\overline{h(t,z)}][h(t,x_t,\tilde{x}_{\tau}^{N},z)-\overline{h(t,z)}]\times$$
$$\times[h(t,x_t,\tilde{x}_{\tau}^{N},z)-\overline{h(t,z)}]^{T}\}]+$$
$$+\mathrm{tr}\left[Q(t)M\left\{\left[\frac{\partial\ln p^{t}_{\tau,t,s}(\tilde{x}_{\tau}^{N};x_t;\tilde{x}_{s}^{L})}{\partial x_t}-\frac{\partial\ln p_t(x_t;\tilde{x}_{\tau}^{N})}{\partial x_t}\right]\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\frac{\partial\ln p_t(x_t;\tilde{x}_{\tau}^{N})}{\partial x_t}\right)^{T}\right\}\right]-$$
$$-\mathrm{tr}\left[Q(t)M\left\{\left[\begin{matrix}\frac{\partial\ln p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_{\tau}^{N};t,x_t;\tilde{s}_L,\tilde{x}_{s}^{L})}{\partial x_t}-\\ -\frac{\partial\ln p(t,x_t;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_{\tau}^{N})}{\partial x_t}\end{matrix}\right]\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\frac{\partial\ln p(t,x_t;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_{\tau}^{N})}{\partial x_t}\right)^{T}\right\}\right]-$$
$$-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[Q(t)M\left\{\frac{\partial\ln p^{t}_{\tau,t,s}(\tilde{x}_{\tau}^{N};x_t;\tilde{x}_{s}^{L})}{\partial x_t}\left(\frac{\partial\ln p^{t}_{\tau,t,s}(\tilde{x}_{\tau}^{N};x_t;\tilde{x}_{s}^{L})}{\partial x_t}\right)^{T}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\partial\ln p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_{\tau}^{N};t,x_t;\tilde{s}_L,\tilde{x}_{s}^{L})}{\partial x_t}\left(\frac{\partial\ln p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_{\tau}^{N};t,x_t;\tilde{s}_L,\tilde{x}_{s}^{L})}{\partial x_t}\right)^{T}\right\}\right] \quad (11)$$

с начальным условием

$$I^{t_m}_{\tau,t_m,s}[\tilde{x}_{\tau}^{N},x_{t_m},\tilde{x}_{s}^{L};z_0^t,\eta_0^m]=$$
$$=I^{t_m-0}_{\tau,t_m,s}[\tilde{x}_{\tau}^{N},x_{t_m},\tilde{x}_{s}^{L};z_0^{t_m},\eta_0^{m-1}]+$$
$$+\Delta I^{t_m}_{\tau,t_m,s}[\tilde{x}_{\tau}^{N},x_{t_m},\tilde{x}_{s}^{L};z_0^{t_m},\eta(t_m)], \quad (12)$$

где

$$p(t,x;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N)=\partial^{N+1}\mathbf{P}\{x_t\le x;\tilde{x}_{\tau}^{N}\le\tilde{x}_N\}/\partial x\partial\tilde{x}_N,$$
$$\Delta I^{t_m}_{\tau,t_m,s}[\cdot]=M\left\{\frac{c(x_{t_m},\tilde{x}_{\tau}^{N},\eta(t_m),z)}{c(\eta(t_m),z)}\right\},$$

а $I^{t_m-0}_{\tau,t_m,s}[\tilde{x}_{\tau}^{N},x_{t_m},\tilde{x}_{s}^{L};z_0^{t_m},\eta_0^{m-1}]=\lim I^{t}_{\tau,t,s}[\cdot]$ при $t\uparrow t_m$.

Доказательство. Совместная априорная плотность (6) определяется уравнением

$$d_t p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N;t,x;\tilde{s}_L,\tilde{x}^{L})=$$
$$=\mathbf{L}_{t,x}[p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N;t,x;\tilde{s}_L,\tilde{x}^{L});p(t,x;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N)]dt,$$

которое следует из (8). Обновляющий процесс $\tilde{z}_t$, дифференциал которого имеет вид $d\tilde{z}_t=dz_t-\overline{h(t,z)}dt$, является таким, что $Z_t=(\tilde{z}_t,\mathrm{F}_t^z)$ есть винеровский процесс с $M\{\tilde{z}_t\tilde{z}_t^T|\mathrm{F}_t^z\}=\int_0^t R(\tau,z)d\tau$ [9]. Тогда дифференцирование по формуле Ито дает, что

$$d_t \ln \frac{p^t_{\tau,t,s}(\tilde{x}_N;x;\tilde{x}^L)}{p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N;t,x;\tilde{s}_L,\tilde{x}^L)} =$$
$$= \frac{1}{p^t_{\tau,t,s}(\tilde{x}_N;x;\tilde{x}^L)} \mathbf{L}_{t,x}[p^t_{\tau,t,s}(\tilde{x}_N;x;\tilde{x}^L); p_t(x;\tilde{x}_N)]dt -$$
$$- \frac{1}{p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N;t,x;\tilde{s}_L,\tilde{x}^L)} \times$$
$$\times \mathbf{L}_{t,x}[p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N;t,x;\tilde{s}_L,\tilde{x}^L); p(t,x;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N)]dt -$$
$$- \frac{1}{2}[h(t,x,\tilde{x}_N,z) - \overline{h(t,z)}]^T \times$$
$$\times R^{-1}(t,z)[h(t,x,\tilde{x}_N,z) - \overline{h(t,z)}]dt +$$
$$+[h(t,x,\tilde{x}_N,z) - \overline{h(t,z)}]^T R^{-1}(t,z)[dz_t - \overline{h(t,z)}].$$

Применяя к последнему выражению формулу Ито-Вентцеля, получаем аналогично [3, 4, 7], что

$$d_t \ln \frac{p^t_{\tau,t,s}(\tilde{x}^N_\tau;x_t;\tilde{x}^L_s)}{p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau;t,x_t;\tilde{s}_L,\tilde{x}^L_s)} =$$
$$= \frac{1}{2}[h(t,x_t,\tilde{x}^N_\tau,z) - \overline{h(t,z)}]^T \times$$
$$\times R^{-1}(t,z)[h(t,x_t,\tilde{x}^N_\tau,z) - \overline{h(t,z)}]dt +$$
$$+\mathrm{tr}\left[Q(t) \left[\begin{array}{l} \frac{1}{p_t(x_t;\tilde{x}^N_\tau)} \frac{\partial^2 p_t(x_t;\tilde{x}^N_\tau)}{\partial x_t^2} - \\ - \frac{1}{p(t,x_t;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau)} \frac{\partial^2 p(t,x_t;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau)}{\partial x_t^2} \end{array} \right] \right] dt +$$
$$+\mathrm{tr}\left[Q(t) \left[\begin{array}{l} \frac{\partial \ln p^t_{\tau,t,s}(\tilde{x}^N_\tau;x_t;\tilde{x}^L_s)}{\partial x_t} - \\ - \frac{\partial \ln p_t(x_t;\tilde{x}^N_\tau)}{\partial x_t} \end{array} \right] \left(\frac{\partial \ln p_t(x_t;\tilde{x}^N_\tau)}{\partial x_t} \right)^T \right] dt -$$
$$-\mathrm{tr}\left[\begin{array}{l} Q(t) \left[\begin{array}{l} \frac{\partial \ln p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau;t,x_t;\tilde{s}_L,\tilde{x}^L_s)}{\partial x_t} - \\ - \frac{\partial \ln p(t,x_t;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau)}{\partial x_t} \end{array} \right] \times \\ \times \left(\frac{\partial \ln p(t,x_t;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau)}{\partial x_t} \right)^T \end{array} \right] dt -$$
$$-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[Q(t) \left[\begin{array}{l} \frac{\partial \ln p^t_{\tau,t,s}(\tilde{x}^N_\tau;x_t;\tilde{x}^L_s)}{\partial x_t} (\cdot)^T - \\ - \frac{\partial \ln p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau;t,x_t;\tilde{s}_L,\tilde{x}^L_s)}{\partial x_t} (\cdot)^T \end{array} \right] \right] dt +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_t} \ln \frac{p^t_{\tau,t,s}(\tilde{x}^N_\tau;x_t;\tilde{x}^L_s)}{p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau;t,x_t;\tilde{s}_L,\tilde{x}^L_s)} \Phi_1(t)dw_t +$$
$$+[h(t,x_t,\tilde{x}^N_\tau,z) - \overline{h(t,z)}]^T R^{-1}(t,z)\Phi_2(t,z)dv_t.$$

Дальнейшие преобразования по выводу уравнения (11) повторяют преобразования по выводу уравнения (3.8) в [5], а подстановка (9) в (5) приводит к (12). Теорема доказана.

Терема 2. Пусть

$$I^t_{s|\tau,t}[\tilde{x}^L_s;z^t_0,\eta^m_0 \left| \tilde{x}^N_\tau, x_t \right.] = M\left\{ \ln \frac{p^t_{s|\tau,t}(\tilde{x}^L_s \left| \tilde{x}^N_\tau; x_t \right.)}{p(\tilde{s}_L,\tilde{x}^L_s \left| \tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau;t,x_t \right.)} \right\}, \quad (13)$$

$$p(\tilde{s}_L,\tilde{x}^L \left| \tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N;t,x \right.) =$$
$$= \partial^L \mathbf{P}\{\tilde{x}^L_s \le \tilde{x}^L \left| \tilde{x}^N_\tau \le \tilde{x}_N; x_t \le x \right.\} \big/ \partial\tilde{x}^L,$$
$$p^t_{s|\tau,t}(\tilde{x}^L \left| \tilde{x}_N; x \right.) =$$
$$= \partial^L \mathbf{P}\{\tilde{x}^L_s \le \tilde{x}^L \left| \tilde{x}^N_\tau \le \tilde{x}_N; x_t \le x; z^t_0,\eta^m_0 \right.\} \big/ \partial\tilde{x}^L,$$

есть условное количество информации о будущих значениях процесса x_t при фиксированных прошлых и текущих значениях этого процесса, которое содержится в совокупности реализаций $\{z^t_0;\eta^m_0\}$,

$$I^t_{\tau,t}[\tilde{x}^N_\tau, x_t; z^t_0,\eta^m_0] = M\left\{ \ln \frac{p^t_\tau(x_t;\tilde{x}^N_\tau)}{p(t,x_t;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau)} \right\}, \quad (14)$$

есть количество информации о прошлых и текущих значениях процесса x_t, которое содержится в совокупности реализаций $\{z^t_0;\eta^m_0\}$. Тогда количество информации (5) может быть представлено в виде

$$I^t_{\tau,t,s}[\tilde{x}^N_\tau, x_t, \tilde{x}^L_s; z^t_0,\eta^m_0] =$$
$$I^t_{s|\tau,t}[\tilde{x}^L_s;z^t_0,\eta^m_0 \left| \tilde{x}^N_\tau, x_t \right.] + I^t_{\tau,t}[\tilde{x}^N_\tau, x_t; z^t_0,\eta^m_0], \quad (15)$$

где $I^t_{s|\tau,t}[\tilde{x}^L_s;z^t_0,\eta^m_0 \left| \tilde{x}^N_\tau, x_t \right.]$ и $I^t_{\tau,t}[\tilde{x}^N_\tau, x_t; z^t_0,\eta^m_0]$ на интервалах $t_m \le t < t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$dI^t_{s|\tau,t}[\tilde{x}^L_s;z^t_0,\eta^m_0 \left| \tilde{x}^N_\tau, x_t \right.] \big/ dt =$$
$$= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[Q(t) M \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \ln p^t_{s|\tau,t}(\tilde{x}^L_s \left| \tilde{x}^N_\tau, x_t \right.)}{\partial x_t} \times \\ \times \left(\frac{\partial \ln p^t_{s|\tau,t}(\tilde{x}^L_s \left| \tilde{x}^N_\tau, x_t \right.)}{\partial x_t} \right)^T - \\ - \frac{\partial \ln p(\tilde{s}_L,\tilde{x}^L_s \left| \tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau;t,x_t \right.)}{\partial x_t} \times \\ \times \left(\frac{\partial \ln p(\tilde{s}_L,\tilde{x}^L_s \left| \tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau;t,x_t \right.)}{\partial x_t} \right)^T \end{array} \right\} \right], \quad (16)$$

$$\frac{dI^t_{\tau,t}[\tilde{x}^N_\tau, x_t; z^t_0,\eta^m_0]}{dt} =$$
$$= (1/2)\,\mathrm{tr}\left[M \left\{ \begin{array}{l} R^{-1}(t,z)\left[h(t,x_t\tilde{x}^N_\tau,z) - \overline{h(t,z)} \right] \times \\ \times \left[h(t,x_t\tilde{x}^N_\tau,z) - \overline{h(t,z)} \right]^T \end{array} \right\} \right] -$$
$$-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[Q(t) M \left\{ \frac{\partial \ln p_t(x_t,\tilde{x}^N_\tau)}{\partial x_t} \left(\frac{\partial \ln p_t(x_t,\tilde{x}^N_\tau)}{\partial x_t} \right)^T - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\partial \ln p(t,x_t;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau)}{\partial x_t} \left(\frac{\partial \ln p(t,x_t;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau)}{\partial x_t} \right)^T \right\} \right] \quad (17)$$

с начальными условиями

$$I^{t_m}_{s|\tau,t_m}[\tilde{x}^L_s;z^{t_m}_0,\eta^m_0 \left| \tilde{x}^N_\tau, x_{t_m} \right.] =$$
$$= I^{t_m-0}_{s|\tau,t_m}[\tilde{x}^L_s;z^{t_m}_0,\eta^{m-1}_0 \left| \tilde{x}^N_\tau, x_{t_m} \right.] +$$
$$+\Delta I^{t_m}_{s|\tau,t_m}[\tilde{x}^L_s;z^{t_m}_0,\eta(t_m) \left| \tilde{x}^N_\tau, x_{t_m} \right.], \quad (18)$$

$$I^{t_m}_{\tau,t_m}[\tilde{x}^N_\tau, x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta_0^m] =$$
$$= I^{t_m-0}_{\tau,t_m}[\tilde{x}^N_\tau, x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta_0^{m-1}] + \Delta I^{t_m}_{\tau,t_m}[\tilde{x}^N_\tau, x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta(t_m)], \quad (19)$$

где

$$\Delta I^{t_m}_{s|\tau,t_m}[\tilde{x}^L_s; z_0^{t_m}, \eta(t_m) \big| \tilde{x}^N_\tau, x_{t_m}] =$$
$$= M\left\{ \ln \frac{c(x_{t_m}, \tilde{x}^N_\tau, \eta(t_m), z)}{c(\eta(t_m), z \big| x_{t_m}, \tilde{x}^N_\tau)} \right\}, \quad (20)$$

$$\Delta I^{t_m}_{\tau,t_m}[\tilde{x}^N_\tau, x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta(t_m)] =$$
$$= M\left\{ \ln \frac{c(\eta(t_m), z \big| \tilde{x}^N_\tau, x_{t_m})}{c(\eta(t_m), z)} \right\}, \quad (21)$$

$$c(\eta(t_m), z \big| \tilde{x}_N, x) =$$
$$= M\{c(x_{t_m}, \tilde{x}^N_\tau, \eta(t_m), z) \big| \tilde{x}^N_\tau = \tilde{x}_N, x_t = x, z_0^{t_m}, \eta_0^{m-1}\},$$

а $I^{t_m-0}_{s|\tau,t_m}[\cdot] = \lim I^t_{s|\tau,t}[\cdot]$, $I^{t_m-0}_{\tau,t_m}[\cdot] = \lim I^t_{\tau,t}[\cdot]$ при $t \uparrow t_m$.

Доказательство. По формуле условной вероятности

$$p^t_{\tau,t,s}(\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L) = p^t_{s|\tau,t}(\tilde{x}^L \mid \tilde{x}_N; x) p_t(x; \tilde{x}_N), \quad (22)$$
$$p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x; \tilde{s}_L, \tilde{x}^L) =$$
$$= p(\tilde{s}_L, \tilde{x}^L \big| \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x) p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x). \quad (23)$$

Подстановка (22), (23) в (5) с учетом (13), (14) приводит к (15). Плотность $p_t(x;\tilde{x}_N)$ удовлетворяет уравнению [7]

$$d_t p_t(x; \tilde{x}_N) = L_{t,x}[p_t(x; \tilde{x}_N)]dt +$$
$$+ p_t(x; \tilde{x}_N)[h(t, x, \tilde{x}_N, z) - \overline{h(t,z)}]^T \times$$
$$\times R^{-1}(t,z)[dz_t - \overline{h(t,z)}dt]. \quad (24)$$

Дифференцируя

$$p^t_{s|\tau,t}(\tilde{x}^L \mid \tilde{x}_N; x) = p^t_{\tau,t,s}(\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L) \big/ p_t(x; \tilde{x}_N)$$

по формуле Ито с использованием (8), (24), получаем

$$d_t p^t_{s|\tau,t}(\tilde{x}^L \mid \tilde{x}_N; x) = -L^*_{t,x}[p^t_{s|\tau,t}(\tilde{x}^L \mid \tilde{x}_N; x)]dt.$$

Априорная плотность $p(\tilde{s}_L, \tilde{x}^L \mid \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x)$ определяется уравнением того же типа, что и $p^t_{s|\tau,t}(\tilde{x}^L \mid \tilde{x}_N; x)$, т. е. уравнением

$$d_t p(\tilde{s}_L, \tilde{x}^L \mid \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x) = -L^*_{t,x}[p(\tilde{s}_L, \tilde{x}^L \mid \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x)]dt.$$

Дальнейший вывод уравнения (16) проводится с использованием формул Ито и Ито-Венцеля по методике вывода уравнения (11). Уравнение (17) выводится аналогично (16) с использованием (24) с учетом того что $d_t p(t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N) = L_{t,x}[p(t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N)]dt$ (см. [7]). Интегрирование (9) слева и справа по с учетом (22) дает, что

$$p^{t_m}_{\tau,t_m}(x; \tilde{x}_N) = \frac{c(\eta(t_m), z \big| \tilde{x}^N_\tau, x_{t_m})}{c(\eta(t_m), z)} p^{t_m-0}_{\tau,t_m}(x; \tilde{x}_N). \quad (25)$$

Поделив (9) на (25) получаем с учетом (22), что

$$p^{t_m}_{s|\tau,t_m}(\tilde{x}^L \mid \tilde{x}_N; x) = \frac{c(x; \tilde{x}_N, \eta(t_m), z)}{c(\eta(t_m), z \big| \tilde{x}_N, x)} p^{t_m-0}_{s|\tau,t_m}(\tilde{x}^L \mid \tilde{x}_N; x). \quad (26)$$

Использование (26) в (13) приводит с учетом (20) к (18). Использование (25) (14) приводит с учетом (21) к (19).

4. Условно-гауссовский случай

Утверждение 2. Пусть

$$f(\cdot) = F(t)x_t, \quad p_0(x) = N\{x; \mu_0; \Gamma_0\},$$
$$h(\cdot) = H_0(t,z)x_t + \sum_{k=1}^N H_k(t,z)x_{\tau_k},$$
$$g(\cdot) = G_0(t_m,z)x_t + \sum_{k=1}^N G_k(t_m,z)x_{\tau_k}. \quad (27)$$

Тогда имеет место свойство

$$p^t_{\tau,t,s}(\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L) =$$
$$= N\left\{\tilde{x}_{N+L+1}; \tilde{\mu}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L), \tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L)\right\} =$$
$$= N\left[\begin{bmatrix} x \\ \tilde{x}_N \\ \tilde{x}^L \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mu(t) \\ \tilde{\mu}_N(\tilde{\tau}_N, t) \\ \tilde{\mu}^L(\tilde{s}_L, t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Gamma(t) & \tilde{\Gamma}_{0N}(\tilde{\tau}_N, t) & \tilde{\Gamma}^L_{0,N+1}(\tilde{s}_L, t) \\ \tilde{\Gamma}^T_{0N}(\cdot) & \tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N, t) & \tilde{\Gamma}^L_{N,N+1}(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L) \\ (\tilde{\Gamma}^L_{0,N+1}(\cdot))^T & (\tilde{\Gamma}^L_{N,N+1}(\cdot))^T & \tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L, t) \end{bmatrix}\right], \quad (28)$$

где блочные составляющие параметров распределения (28) определяются дифференциально-рекуррентными уравнениями в [1].

Теорема 3. Пусть выполняется условие (27). Тогда количество информации (5) на интервалах $t_m \le t < t_{m+1}$ определяется уравнением

$$\frac{dI^t_{\tau,t,s}[\tilde{x}^N_\tau, x_t, \tilde{x}^L_s; z_0^t, \eta_0^m]}{dt} =$$
$$= (1/2)\,\mathrm{tr}\begin{bmatrix} M\{R^{-1}(t,z)H_{0,N}(t,z) \times \\ \times \tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t)H^T_{0,N}(t,z)\} \end{bmatrix} -$$
$$-(1/2)\,\mathrm{tr}\begin{bmatrix} Q(t)M\{\Gamma^{-1}(t \mid \tilde{s}_L) + \\ +\Gamma^{-1}(t \mid \tilde{\tau}_N) - \Gamma^{-1}(t)\} \end{bmatrix} +$$
$$+(1/2)\,\mathrm{tr}\begin{bmatrix} Q(t)[D^{-1}(t \mid \tilde{s}_L) + \\ +D^{-1}(t \mid \tilde{\tau}_N) - D^{-1}(t)] \end{bmatrix} \quad (29)$$

с начальным условием (12), где

$$\Delta I^{t_m}_{\tau,t_m,s}[\tilde{x}^N_\tau, x_{t_m}, \tilde{x}^L_s; z_0^{t_m}, \eta(t_m)] =$$
$$= \frac{1}{2} M\left\{ \ln \frac{\left|\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0, \tilde{s}_L)\right|}{\left|\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m, \tilde{s}_L)\right|} \right\}, \quad (30)$$

$$H_{0,N}(t,z) = [H_0(t,z) \mid H_1(t,z) \mid \cdots \mid H_N(t,z)],$$
$$\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) = \begin{bmatrix} \Gamma(t) & \tilde{\Gamma}_{0N}(\tilde{\tau}_N, t) \\ \tilde{\Gamma}^T_{0N}(\tilde{\tau}_N, t) & \tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N, t) \end{bmatrix},$$

$$\Gamma(t\,|\,\tilde{\tau}_N) = \Gamma(t) - \tilde{\Gamma}_{0N}(\tilde{\tau}_N,t)\tilde{\Gamma}_N^{-1}(\tilde{\tau}_N,t)\tilde{\Gamma}_{0N}^T(\tilde{\tau}_N,t), \quad (31)$$

$$\Gamma(t\,|\,\tilde{s}_L) = $$
$$= \Gamma(t) - \tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(\tilde{s}_L,t)(\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L,t))^{-1}(\tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(\tilde{s}_L,t))^T, \quad (32)$$

$$D(t\,|\,\tilde{\tau}_N) = D(t) - \tilde{D}_{0N}(\tilde{\tau}_N,t)\tilde{D}_N^{-1}(\tilde{\tau}_N,t)\tilde{D}_{0N}^T(\tilde{\tau}_N,t), \quad (33)$$

$$D(t\,|\,\tilde{s}_L) = $$
$$= D(t) - \tilde{D}_{0,N+1}^L(\tilde{s}_L,t)(\tilde{D}^L(\tilde{s}_L,t))^{-1}(\tilde{D}_{0,N+1}^L(\tilde{s}_L,t))^T,$$

$D(t), \tilde{D}_{0N}(\tilde{\tau}_N,t), \tilde{D}_N(\tilde{\tau}_N,t), \tilde{D}_{0N+1}^L(\tilde{s}_L,t), \tilde{D}^L(\tilde{s}_L,t)$ – блочные составляющие матрицы вторых моментов $\tilde{D}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t,\tilde{s}_L)$ априорного гауссовского распределения

$$p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N;t,x;\tilde{s}_L,\tilde{x}^L) =$$
$$= \mathbf{N}\{\tilde{x}_{N+L+1};\tilde{a}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t,\tilde{s}_L),\tilde{D}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t,\tilde{s}_L)\},$$

блочная структура параметров которого аналогична блочной структуре параметров распределения (28).

Доказательство. По свойству гауссовских плотностей имеет место свойство [9]

$$p_{t|\tau}^t(x\,|\,\tilde{x}_N) = \mathbf{N}\{x;\mu(t\,|\,\tilde{\tau}_N),\Gamma(t\,|\,\tilde{\tau}_N)\}, \quad (34)$$

$$\mu(t\,|\,\tilde{\tau}_N) =$$
$$= \mu(t) + \tilde{\Gamma}_{0N}(\tilde{\tau}_N,t)(\tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N,t))^{-1}[\tilde{x}_N - \tilde{\mu}_N(\tilde{\tau}_N,t)],$$

а $\Gamma(t|\tilde{\tau}_N)$ определено в (31). Из (10), (27), (28) следует, что

$$\overline{h(t,z)} = H_{0,N}(t,z)\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t),$$
$$h(t,x_t,\tilde{x}_\tau^N,z) - \overline{h(t,z)} =$$
$$= H_{0,N}(t,z)[\tilde{x}_\tau^{N+1} - \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)],$$
$$M\{[h(t,x_t,\tilde{x}_\tau^N,z) - \overline{h(t,z)}][h(t,x_t,\tilde{x}_\tau^N,z) - \overline{h(t,z)}]^T\} =$$
$$= H_{0,N}(t,z)\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H_{0N}^T(t,z), \quad (35)$$

где $\mu_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t) = \begin{bmatrix} \mu(t) \\ \tilde{\mu}_N(\tilde{\tau}_N,t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_\tau^{N+1} = \begin{bmatrix} x_t \\ \tilde{x}_\tau^N \end{bmatrix}.$

Так как $p_t(x_t;\tilde{x}_\tau^N) = p_{t|\tau}(x_t;\tilde{x}_\tau^N)p_t(\tilde{x}_\tau^N)$, то с учетом (34)

$$\frac{\partial \ln p_t(x_t;\tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} = \frac{\partial \ln p_{t|\tau}(x_t\,|\,\tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} =$$
$$= -\Gamma^{-1}(t\,|\,\tilde{\tau}_N)[x_t - \mu(t\,|\,\tilde{\tau}_N)],$$

$$M\left\{\frac{\partial \ln p_t(x_t;\tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial \ln p_t(x_t;\tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}\right)^T\right\} = \Gamma^{-1}(t\,|\,\tilde{\tau}_N). \quad (36)$$

По формуле условной вероятности

$$p_{\tau,t,s}^t(\tilde{x}_\tau^N;x_t;\tilde{x}_s^L) =$$
$$= \frac{p_{t|s}(x_t\,|\,\tilde{x}_s^L)}{p_t(x_t)}\,p_{t|\tau}(x_t\,|\,\tilde{x}_\tau^N)p_t(\tilde{x}_\tau^N)p_s(\tilde{x}_s^L). \quad (37)$$

Тогда

$$M\left\{\frac{\partial \ln p_{\tau,t,s}^t(\tilde{x}_\tau^N;x_t;\tilde{x}_s^L)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial \ln p_t(x_t;\tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}\right)^T\right\} =$$
$$= M\left\{\frac{\partial \ln p_{t|s}(x_t\,|\,\tilde{x}_s^L)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial \ln p_{t|\tau}(x_t\,|\,\tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}\right)^T\right\} +$$
$$+ M\left\{\frac{\partial \ln p_{t|\tau}(x_t\,|\,\tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial \ln p_{t|\tau}(x_t\,|\,\tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}\right)^T\right\} -$$
$$- M\left\{\frac{\partial \ln p_t(x_t)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial \ln p_{t|\tau}(x_t\,|\,\tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}\right)^T\right\}. \quad (38)$$

Аналогично (34)

$$p_{t|s}(x\,|\,\tilde{x}^L) = \mathbf{N}\{x;\mu(t\,|\,\tilde{s}_L),\Gamma(t\,|\,\tilde{s}_L)\}, \quad (39)$$

$$\mu(t\,|\,\tilde{s}_L) =$$
$$= \mu(t) + \tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(\tilde{s}_L,t)(\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L,t))^{-1}[\tilde{x}^L - \tilde{\mu}^L(\tilde{s}_L,t)],$$

а $\Gamma(t|\tilde{s}_L)$ определено в (32). Так как

$$p_s^t(x_t;\tilde{x}_s^L) = p_{t|s}(x_t\,|\,\tilde{x}_s^L)p_s(\tilde{x}_s^L),$$

то с учетом (39)

$$\frac{\partial \ln p_s^t(x_t;\tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} = \frac{\partial \ln p_{t|s}(x_t\,|\,\tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} =$$
$$= -\Gamma^{-1}(t\,|\,\tilde{s}_L)[x_t - \mu(t\,|\,\tilde{s}_L)]. \quad (40)$$

Тогда из (37), (40) с учетом (34), (39) следует, что

$$M\left\{\frac{\partial \ln p_{t|s}(x_t\,|\,\tilde{x}_s^L)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial \ln p_{t|\tau}(x_t\,|\,\tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}\right)^T\right\} = \Gamma^{-1}(t). \quad (41)$$

Так как $p_t(x) = \mathbf{N}\{x;\mu(t),\Gamma(t)\}$ [9], то

$$\frac{\partial \ln p_t(x_t)}{\partial x_t} = -\Gamma^{-1}(t)[x_t - \mu(t)], \quad (42)$$

и с учетом (34), (37)

$$M\left\{\frac{\partial \ln p_t(x_t)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial \ln p_{t|\tau}(x_t\,|\,\tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}\right)^T\right\} = \Gamma^{-1}(t). \quad (43)$$

Тогда из (37), (38), (41–43)

$$M\left\{\begin{aligned}&\left[\frac{\partial \ln p_{\tau,t,s}^t(\tilde{x}_\tau^N;x_t;\tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} - \frac{\partial \ln p_t(x_t;\tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}\right]\times \\ &\times\left(\frac{\partial \ln p_t(x_t;\tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}\right)^T\end{aligned}\right\} = 0. \quad (44)$$

Из (40) следует

$$M\left\{\frac{\partial \ln p_{t|s}(x_t\,|\,\tilde{x}_s^L)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial \ln p_{t|s}(x_t\,|\,\tilde{x}_s^L)}{\partial x_t}\right)^T\right\} =$$
$$= \Gamma^{-1}(t\,|\,\tilde{s}_L). \quad (45)$$

Из (39), (40), (42) следует

$$M\left\{\frac{\partial \ln p_{t|s}(x_t \mid \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial \ln p_t(x_t)}{\partial x_t}\right)^T\right\} = \Gamma^{-1}(t). \quad (46)$$

Из (37), (41), (43), (45), (46) следует

$$M\left\{\frac{\partial \ln p^t_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N;x_t;\tilde{x}_s^L)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial \ln p^t_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N;x_t;\tilde{x}_s^L)}{\partial x_t}\right)^T\right\} =$$

$$= \Gamma^{-1}(t \mid \tilde{s}_L) + \Gamma^{-1}(t \mid \tilde{\tau}_N) - \Gamma^{-1}(t). \quad (47)$$

При условиях (27) априорная плотность (6) является гауссовской

$$p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x; \tilde{s}_L, \tilde{x}^L) =$$

$$= \mathbf{N}\{\tilde{x}_{N+L+1}; \bar{\bar{x}}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L), \tilde{D}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L)\}. \quad (48)$$

Тогда для плотности (48) будут справедливы формулы аналогичные (44), (47). Подстановка (35), (39), (47) и формул связанных с (48) аналогичных (44), (47), в (11) приводит к (29). Из (9), (28) следует, что

$$M\left\{\ln\frac{c(x_{t_m}, \tilde{x}_\tau^N, \eta(t_m), z)}{c(\eta(t_m), z)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} M\left\{\ln\frac{\left|\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0, \tilde{s}_L)\right|}{\left|\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m, \tilde{s}_L)\right|}\right\},$$

т. е. с учетом (12) пришли к (30). Теорема доказана.

Теорема 4. Количества информации (13) и (14) на интервалах определяются уравнениями

$$dI^t_{s|\tau,t}[\tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta_0^m \left| \tilde{x}_\tau^N, x_t\right.]/dt =$$

$$= -(1/2)\,\mathrm{tr}[Q(t) M\{\Gamma^{-1}(t \mid \tilde{s}_L) - \Gamma^{-1}(t)\}] +$$

$$+(1/2)\,\mathrm{tr}[Q(t)[D^{-1}(t \mid \tilde{s}_L) - D^{-1}(t)]], \quad (49)$$

$$dI^t_{\tau,t}[\tilde{x}_\tau^N, x_t; z_0^t, \eta_0^m]/dt =$$

$$= (1/2)\,\mathrm{tr}\left[M\left\{\begin{array}{l} R^{-1}(t,z) H_{0,N}(t,z_t) \times \\ \times \tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) H^T_{0,N}(t,z_t)\end{array}\right\}\right] -$$

$$-(1/2)\,\mathrm{tr}\left[Q(t) M\{\Gamma^{-1}(t \mid \tilde{\tau}_N)\}\right] +$$

$$+(1/2)\,\mathrm{tr}[Q(t) D^{-1}(t \mid \tilde{\tau}_N)] \quad (50)$$

с начальными условиями (18), (19), где

$$\Delta I^{t_m}_{s|\tau,t_m}[\tilde{x}_s^L; z_0^{t_m}, \eta(t_m) \left| \tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}\right.] =$$

$$= \frac{1}{2} M\left\{\ln\frac{\left|\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L \left|\tilde{\tau}_N, t_m - 0\right.)\right|}{\left|\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L \left|\tilde{\tau}_N, t_m\right.)\right|}\right\}, \quad (51)$$

$$\Delta I^{t_m}_{\tau,t_m}[\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta(t_m)] =$$

$$= \frac{1}{2} M\left\{\ln\frac{\left|\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0)\right|}{\left|\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t_m)\right|}\right\}, \quad (52)$$

$$\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L \left|\tilde{\tau}_N, t\right.) = \tilde{\Gamma}^L(\cdot) - \begin{bmatrix}\tilde{\Gamma}^L_{0,N+1}(\tilde{s}_L, t) \\ \tilde{\Gamma}^L_{N,N+1}(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L)\end{bmatrix}^T \times$$

$$\times(\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t))^{-1}\begin{bmatrix}\tilde{\Gamma}^L_{0,N+1}(\tilde{s}_L, t) \\ \tilde{\Gamma}^L_{N,N+1}(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L)\end{bmatrix}. \quad (53)$$

Доказательство. По формуле условной вероятности

$$p^t_{s|\tau,t}(\tilde{x}_s^L \mid x_t; \tilde{x}_\tau^N) = \frac{p^t_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}.$$

Тогда

$$\frac{\partial \ln p^t_{s|\tau,t}(\tilde{x}_s^L \mid x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} =$$

$$= \frac{\partial \ln p^t_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} - \frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}. \quad (54)$$

С учетом (37)

$$\frac{\partial \ln p^t_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} = \frac{\partial \ln p_{t|s}(x_t \mid \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} - \frac{\partial \ln p_t(x_t)}{\partial x_t}. \quad (55)$$

Используя (45), (46) в (55), получаем

$$M\left\{\frac{\partial \ln p^t_{s|\tau,t}(\tilde{x}_s^L \mid x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial \ln p^t_{s|\tau,t}(\tilde{x}_s^L \mid x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}\right)^T\right\} =$$

$$= \Gamma^{-1}(t \mid \tilde{s}_L) - \Gamma^{-1}(t). \quad (56)$$

Аналогичные вычисления дают

$$M\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial \ln p(\tilde{s}_L, \tilde{x}^L \mid t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N)}{\partial x_t} \times \\ \times\left(\dfrac{\partial \ln p(\tilde{s}_L, \tilde{x}^L \mid t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N)}{\partial x_t}\right)^T\end{array}\right\} =$$

$$= D^{-1}(t \mid \tilde{s}_L) - D^{-1}(t). \quad (57)$$

Подстановка (56), (57) в (16) приводит к (49). Уравнение (50) следует непосредственно в результате подстановки (35), (36) и аналогичного соотношения для $p(t,x;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N)$ в (17). Соотношения (51), (52) получаются аналогично (30) с использованием (13), (14). Теорема доказана.

5. Заключение

С использованием результатов [7, 8] получено количество информации по Шеннону в совместной задаче фильтрации, интерполяции и экстраполяции стохастических процессов по непрерывно-дискретным наблюдениям с памятью и исследована ее структура в виде представлений $I^t_{\tau,t,s}[\cdot]$ через условное количество информации $I^t_{s|\tau,t}[\tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta_0^m \left| \tilde{x}_\tau^N, x_t\right.]$ о будущих значениях процесса при фиксированных прошлых и текущих значениях и количество информации $I^t_{\tau,t}[\tilde{x}_\tau^N, x_t; z_0^t, \eta_0^m]$ о прошлых и текущих значениях процесса x_t.

Работа поддержана грантом МД-9509.2006.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демин Н.С., Рожкова С.В., Рожкова О.В. Обобщенная скользящая экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2000. – № 4. – С. 39–51.
2. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. – М.: Иностранная литература, 1963. – 829 с.
3. Демин Н.С., Короткевич В.И. О количестве информации в задачах фильтрации компонент Марковских процессов // Автоматика и телемеханика. – 1983. – № 7. – С. 87–96.
4. Демин Н.С., Короткевич В.И. Об уравнениях для шенноновского количества информации при передаче Марковских диффузионных сигналов по каналам с памятью // Проблемы передачи информации. – 1987. – Т. 23. – № 1. – С. 16–27.
5. Dyomin N.S., Rozhkova S.V., Safronova I.E. Information amount determination for joint problem of filtering and generalized extrapolation of stochastic processes with respect to the set of continuous and discrete memory observations // Informatica. – 2003. – V. 14. – № 3. – P. 295–322.
6. Dyomin N.S., Rozhkova S.V., Safronova I.E. About structure of Shannon information amount for joint filtering and extrapolation problem by continuous-discrete memory observations // Informatica. – 2004. – V. 15. – № 2. – P. 171–202.
7. Демин Н.С., Рожкова С.В. О структуре количества информации в совместной задаче фильтрации и интерполяции по наблюдениям с памятью. Общий случай // Известия Томского политехнического университета. – 2004. – Т. 307. – № 3. – С. 13–17.
8. Демин Н.С., Рожкова С.В. О структуре количества информации в совместной задаче фильтрации и интерполяции по наблюдениям с памятью. Условно-гауссовский случай // Известия Томского политехнического университета. – 2004. – Т. 307. – № 4. – С. 6–10.
9. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.

УДК 330.43